

# 臺北市立大學

## 108 學年度第一學期學士班二、三年級轉學生招生考試試題

系 別：數學系（二年級）

科 目：微積分

考試時間：90 分鐘【08:30–10:00】

總 分：100 分

不得使用計算機 或任何儀器。
-------------------

※ 注意：不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在答卷上；可使用藍色或黑色鋼筆或原子筆或鉛筆作答，使用其他顏色作答者，所考科目以零分計算。（於本試題紙上作答者，不予計分。）

### 計算證明題（每題 10 分，共 100 分）

1. Let  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a function and  $L, M, c \in \mathbb{R}$ . Suppose that

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ and } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M. \text{ Prove that}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = LM.$$

2. Suppose that  $r$  is a positive rational number, and  $f(x) = x^r$  for all  $x > 0$ . Prove that  $f'(x) = rx^{r-1}$  for all  $x > 0$ .

3. Calculate  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} (3^{1/x} + 12^{1/x}) \right)^x$ .

4. Calculate  $\frac{d}{dx} \sec^3(\sqrt{x} \tan \sqrt{x-1}) \tan^2(\sec(x^2 + 2))$ .

5. Let  $f(x) = (\tan x)^{\sec x}$  for all  $x \in (0, \pi/2)$ . Find  $f'(\pi/3)$ .

6. Calculate  $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2} dx$ .

7. Calculate  $\int \frac{x^2+5x+2}{x^3+x^2+x+1} dx$ .

8. Evaluate the integral  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ .

9. Find the interval of convergence:  $\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{k}{k+1}\right)^k x^k$ .

10. Use the method of Lagrange to find the maximum value of

$$f(x, y, z) = x - y + z \text{ on the sphere } x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$