

臺北市立大學

108 學年度第一學期學士班二、三年級轉學生招生考試試題

系 別：數學系（三年級）

科 目：微積分

考試時間：90 分鐘【08:30–10:00】

總 分：100 分

不得使用計算機 或任何儀器。

※ 注意：不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在答卷上；可使用藍色或黑色鋼筆或原子筆或鉛筆作答，使用其他顏色作答者，所考科目以零分計算。（於本試題紙上作答者，不予計分。）

計算證明題（每題 10 分，共 100 分）

1. Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function and $L, M, c \in \mathbb{R}$. Suppose that

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ and } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M. \text{ Prove that}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = LM.$$

2. Suppose that r is a positive rational number, and $f(x) = x^r$ for all $x > 0$. Prove that $f'(x) = rx^{r-1}$ for all $x > 0$.

3. Calculate $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} (3^{1/x} + 12^{1/x}) \right)^x$.

4. Calculate $\frac{d}{dx} \sec^3(\sqrt{x} \tan \sqrt{x-1}) \tan^2(\sec(x^2 + 2))$.

5. Let $f(x) = (\tan x)^{\sec x}$ for all $x \in (0, \pi/2)$. Find $f'(\pi/3)$.

6. Calculate $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2} dx$.

7. Calculate $\int \frac{x^2+5x+2}{x^3+x^2+x+1} dx$.

8. Evaluate the integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

9. Find the interval of convergence: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^k x^k$.

10. Use the method of Lagrange to find the maximum value of

$$f(x, y, z) = x - y + z \text{ on the sphere } x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$